（令 8 後）

数　　　学

（理　科　系）

（1 ～ 5 ページ）

・ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意　解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数　学（理科系）　150 点

1. n を正の整数とする．点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 $3 \cdot 2^n$ 角形を X とする．$n=1$ のとき X は正 6 角形であり，$n=2$ のとき X は正 12 角形である．X の頂点をひとつ選んでそれを P_2 とし，P_2 の両隣の頂点をそれぞれ P_1，P_3 とする．$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$ を θ_n とする．$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積を S_n とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) S_n を $\cos\theta_n, \sin\theta_n$ を用いて表せ.

(2) すべての n に対して $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} < \dfrac{1}{4}$ が成り立つことを証明せよ.

2. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \tan x - \frac{x^2}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

で定める．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において $f'(x) > 0$ であることを証明せよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ における $y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ とし，
$a = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{32}$ とするとき，

$$\frac{dg}{dy}(a), \quad \frac{d^2g}{dy^2}(a)$$

をそれぞれ求めよ．

(3) $g(y)$ は (2) のものとする．定積分

$$\int_{f(0)}^{f(1)} g(y)\,dy$$

を求めよ．

3. 以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $x>0$ とする．

$$\left(4^{x}\right)^{\log_2\left(7^{\frac{1}{x}}\right)}$$

の値を対数を用いずに表せ．

(2) $x>0$ とする．関数

$$f(x)=x^{\log\left(2^{\log x}\right)}$$

の極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を図示せよ．グラフの凹凸は調べなくてよい．

4. 2つの関数

$$y = 1 - \frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi}{2} - x\right| \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$
$$y = \sin x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする．以下の問に答えよ．(配点30点)

(1) C_1 と C_2 の概形を同一の座標平面上に図示せよ．

(2) C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) C_1 と C_2 で囲まれた部分を直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ．

5. $a \geqq 0$ とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a\sin x + \sin 2x \quad (0 < x < 2\pi)$$

で定める．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1) $f'(b) = 0$ とする．$\cos b$ を a を用いて表せ．

(2) $f(x)$ が極大となる x の個数を求めよ．