

(令 8 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 1個のさいころを3回続けて投げ、出た目の数を順に a, b, c とおく. 多項式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1$$

とし, $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りを $r(x)$ とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $r(x)$ が 0 である確率を求めよ.
- (2) $r(x)$ が 0 でなく, かつ, $r(x)$ の次数が 0 である確率を求めよ.
- (3) 方程式 $g(x) = 0$ が有理数の解をもつ確率を求めよ. ただし, 50 以下の正の整数 n に対し, n が 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 のいずれとも異なるならば, \sqrt{n} が無理数であることを必要に応じて用いてよい.
- (4) $r(x)$ の次数が 1 であり, かつ, $g(x)$ が $r(x)$ で割り切れる確率を求めよ.

2. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sin(\log x) \cos(\log x) \quad (1 \leq x \leq e^\pi)$$

と定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形を図示せよ. グラフの凹凸は調べなくてよい.
- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分のうち, $y \geq 0$ である部分の面積を求めよ.

3. 整数 m が性質 P をみたすとは,

$$m = |z^2|$$

が成り立つような実部と虚部が共に整数である複素数 z が存在することとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 性質 P をみたす整数 m で $30 < m < 40$ をみたすものをすべて挙げよ.
- (2) 性質 P をみたす整数 2 つの積は, 性質 P をみたすことを証明せよ.
- (3) 4 で割った余りが 3 であるような整数は, 性質 P をみたさないことを証明せよ.

4. $0 \leq a \leq \pi$ とする. 関数 $f(x)$ は x の連続関数とし,

$$g(x) = \int_a^x f(t) \sin(x-t) dt$$

とおく. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $g'(a)$ を求めよ.

(2) $g''(x)$ を $f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ.

(3) 条件「 $g(x) = \sin x - \sin^2 x$ 」は, 条件「 $f(x) = \sin^2 x - 2 \cos^2 x$
かつ $a = \frac{\pi}{2}$ 」であるための必要十分条件であることを証明
せよ.

5. r を正の実数とする. 複素数 α が

$$(1 + r^2)\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

をみたすとする. 複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(1)$ について以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 次の条件をみたす円 C が存在することを証明し, C の中心を表す複素数と C の半径を求めよ.

条件「すべての正の実数 r に対して, A は C 上にある.

- (2) $t > 0$ とし, $r = te^{-t}$ とする. $t > 0$ における $\triangle OAB$ の面積の最大値とそれを与える t を求めよ.