

(令 7 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。 x の関数

$$f(x) = \sin(x + \theta) \cos x + 1 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

について、以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とする。 $x = \frac{\pi}{24}$ のときの $f(x)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値を $g(\theta)$ とする。定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta g(\theta) d\theta$ を求めよ。

2. a を 0 でない整数とし, x の 2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^2x^2 - 2a(a-1)x + 2$$

と定める。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $a = 2$ とする。 n を整数とするとき, $f(n)$ の最小値とそのときの整数 n をすべて求めよ。
- (2) $a > 0$ とする。 n を整数とするとき, $f(n)$ の最小値とそのときの整数 n をすべて求めよ。
- (3) $a < 0$ とする。 n を整数とするとき, $f(n)$ の最小値とそのときの整数 n をすべて求めよ。

3. θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。 $AB = AC = 1$, $\angle CAB = 2\theta$ である三角形 ABC の面積を S_1 とし, 三角形 ABC の内接円の面積を S_2 とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) S_1 と S_2 をそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $\frac{S_2}{S_1}$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

4. $0, 1, 2, 3, 4$ の数字を 1 つずつ書いた合計 5 枚のカードが袋の中にある。この袋からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返して行うとき， n 回目に取り出したカードに書かれている数字を a_n とする。 S_n を $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ で定め， S_n を 3 で割った余りが 0 となる確率を x_n ， S_n を 3 で割った余りが 1 となる確率を y_n ， S_n を 3 で割った余りが 2 となる確率を z_n とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ をそれぞれ x_n, y_n を用いて表せ。
- (2) x_{n+3} を x_n を用いて表せ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = x_{3n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

5. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての x について

$$ax^2 \leq 1 - \cos x \leq bx^2$$

が成り立つような a の最大値と b の最小値を求めよ。(配点 30 点)