

(令 7 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1.  $k$  を実数とする。 $f(x)$  と  $g(x)$  を

$$f(x) = |x^3 - x|, \quad g(x) = k(x + 1)$$

とおき，曲線  $y = f(x)$  を  $C$ ，直線  $y = g(x)$  を  $\ell$  とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 曲線  $C$  の概形をかけ。ただし，関数  $f(x)$  の極大値を調べる必要はない。
- (2) 曲線  $C$  と直線  $\ell$  がちょうど 4 つの共有点をもつような  $k$  の値を求めよ。

**2.** 実数  $a$  に対して、 $a$  を超えない最大の整数を  $k$  とするとき、 $a - k$  を  $a$  の小数部分という。 $n$  を自然数とし、 $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$  とおく。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1)  $0 < a_n < 1$  が成り立つことを示せ。

(2)  $b_n$  を  $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$  の小数部分とする。 $b_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(3)  $b_n$  を (2) で定めたものとする。 $m, n$  を異なる 2 つの自然数とすると、 $a_m + b_n \neq 1$  であることを示せ。

**3.** 媒介変数  $\theta$  を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を  $C$  とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 曲線  $C$  の概形をかけ。
- (2) 曲線  $C$  で囲まれた部分の面積を求めよ。

4.  $s, t$  を実数とする。座標空間に 3 点

$$A(-4, -1, 0), B(-3, 0, -1), P(s, t, -2s + t - 1)$$

がある。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 3 点  $A, B, P$  は一直線上にないことを示せ。
- (2) 点  $P$  から直線  $AB$  に下ろした垂線を  $PH$  とする。点  $H$  の座標を  $s$  を用いて表せ。
- (3)  $s, t$  が変化するとき, 三角形  $ABP$  の面積の最小値を求めよ。

5. 連続関数  $f(x)$  は  $x \geq 0$  で  $f(x) \geq 0$  を満たし、 $x > 0$  で微分可能であり、その導関数  $f'(x)$  は連続であるとする。 $t \geq 1$  を満たす  $t$  に対して、原点  $O$  と点  $P(t, f(t))$  の距離を  $g(t)$  とする。また、 $t > 1$  を満たす  $t$  に対して、 $y = f(x)$  ( $1 \leq x \leq t$ ) で表される曲線の長さを  $h(t)$  とし、 $t = 1$  のときは  $h(1) = 0$  とする。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1)  $t > 1$  とする。开区間  $(1, t)$  で常に  $f(x) - xf'(x) = 0$  が成り立つならば、閉区間  $[1, t]$  で  $\frac{f(x)}{x}$  は定数であることを示せ。
- (2)  $t \geq 1$  を満たす任意の  $t$  に対して、 $g(t) = h(t) + 2$  が成り立つとする。このとき、 $f(1)$  の値を求めよ。また、 $t \geq 1$  のとき  $f(t)$  を  $t$  を用いて表せ。