

(令 6 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a を実数とする。曲線 $y = \log x$ の法線で、点 $(3, a)$ を通るようなものの本数を求めよ。(配点 30 点)

2. 以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) 2 次関数 $y = 3x^2 - 2x + 1$ のグラフを平行移動した曲線 C が、2 点 $(1, -1)$, $(2, 8)$ を通っている。 C をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。
- (2) 3 次関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した曲線を C' とし, C' をグラフにもつ関数を $y = f(x)$ とする。 $f(x)$ が極大値 4 をとり, さらにグラフ C' が直線 $y = 6x - 4$ に接するとき, p と q の値を求めよ。

3. 正の実数 t に対して, $f(t)$ を

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin \left(\frac{t}{2n} \right) \sum_{k=1}^n \left| \cos \left(\frac{kt}{n} \right) \right|$$

とおく。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $f(t) = \int_0^t |\cos x| dx$ であることを示せ。
- (2) $f(t) = 1000$ を満たす t は 1 つだけ存在する。その t を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ は, 任意の自然数 n について $n\pi \leq a_n \leq n\pi + 2$ を満たしているとする。このとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n)}{n}$ を求めよ。

4. 自然数 n に対して、整式 x^n を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $q_n(x)$ 、余りを $r_n(x)$ とする。たとえば $n = 1, 2, 3$ ではそれぞれ

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 0, & r_1(x) &= x, \\ q_2(x) &= 1, & r_2(x) &= 3x - 2, \\ q_3(x) &= x + 3, & r_3(x) &= 7x - 6 \end{aligned}$$

である。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

- (1) $r_n(x)$ を n と x の式で表せ。
- (2) $q_{n+1}(x) = xq_n(x) + 2^n - 1$ であることを示せ。
- (3) 各項が整数である数列 $\{c_n\}$ を、 $c_n = q_n(4)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。 $c_{n+3} - c_n$ が 7 の倍数であることを示せ。また、 c_{2024} を 7 で割った余りを求めよ。

5. 2つの変量 x , y のデータの値の組

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$$

を考える。変量 x の5個のデータの値は常に

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2$$

であるとする。また、変量 y の5個のデータの値は次のようであるとする。

- y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の値は1, 2, 3, 4, 5のいずれかである。
- y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の値はすべて異なる。

変量 x と y の相関係数を r とするとき、以下の間に答えよ。

(配点 30 点)

- (1) x の標準偏差 s_x と y の標準偏差 s_y をそれぞれ求めよ。
- (2) $r = 0$ のとき、 $y_4 - y_2$ は2の倍数であることを示せ。
- (3) $r = 0$ かつ $y_4 > y_2$ となるような、 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の組の個数を求めよ。
- (4) $r \geq \frac{5}{6}$ となるような、 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 の組の個数を求めよ。