

(令 5 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a を 0 でない実数とする. $f(x)$ は実数全体を定義域とする連続関数で

$$\int_0^x f(t) dt = xe^{-ax^2}$$

をみたしている. 以下の間に答えよ. (配点 30 点)

(1) $f(x)$ を求めよ.

(2) b を実数とする. 方程式 $f(x) = b$ が異なる 4 個の実数解をもつための a, b のみたす必要十分条件を求めよ.

ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ であることは用いてよい.

2. 以下の問に答えよ. (配点30点)

- (1) $a + 2b = 301$ をみたす正の整数の組 (a, b) の個数を求めよ.
- (2) $2a + 3b = 401$ をみたす正の整数の組 (a, b) の個数を求めよ.
- (3) $2a + 2b + 3c = 601$ をみたす正の整数の組 (a, b, c) の個数を求めよ.

3. i を虚数単位とする. p を素数, q を 0 でない有理数とし, $w = \sqrt{p} + qi$ とする. 実数 a, b を係数とする x の整式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ で定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) \sqrt{p} は無理数であることを示せ.
- (2) 複素数 z について, $f(z) = 0$ ならば $f(\bar{z}) = 0$ であることを示せ. ただし, \bar{z} は z と共役な複素数を表す.
- (3) a, b が有理数ならば $f(w) \neq 0$ であることを示せ.

4. $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ ($x > 0$) とするとき、以下の間に答えよ。
(配点 30 点)

(1) $x > 0$ のとき、 $f'(x) > 0$ であることを示せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ ($x > 0$) と y 軸および 2 直線 $y = \frac{e^2 - 1}{2}$,
 $y = \frac{e^3 - 1}{3}$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

5. 角 A が鈍角で $OB = 1$ である $\triangle OAB$ がある. 辺 AB 上に 2 点 P, Q を $\angle AOP = \angle POQ = \angle QOB$ となるようにとる. $\angle QBO = \alpha$, $\angle QOB = \beta$ として, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $OA = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 3\beta)}$ であることを示せ.

(2) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) とおく. $y = f(x)$ のグラフは下に凸であることを示せ.

(3) $OA + OB$ と $OP + OQ$ の大小を比較せよ.