

(令 5 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & (x \leq 1) \\ 2x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

で定める. a を実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) すべての実数 x について $f(x) \geq x$ が成り立つことを示せ.
- (2) $a \leq 1$ のとき, すべての正の整数 n について $a_n \leq 1$ が成り立つことを示せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ.

2. a, b を実数とする. 整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める.
以下の問に答えよ. ただし, 2次方程式の重解は2つと数える.
(配点30点)

- (1) 2次方程式 $f(x) = 0$ が異なる2つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ.
- (2) 2次方程式 $f(x) = 0$ の2つの解の実部が共に0より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ.
- (3) 2次方程式 $f(x) = 0$ の2つの解の実部が共に -1 より大きく, 0 より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ.

3. n を 2 以上の整数とする. 袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている. 以下の間に答えよ.

(配点 30 点)

- (1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ.
- (2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ.
- (3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき, そのカードに書かれている数の和が $2n + 1$ 以上である確率を求めよ.

4. 四面体 OABC があり, 辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$, 5, 5 である. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -11$ とする. 頂点 O から $\triangle ABC$ を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 線分 AB の長さを求めよ.

(2) 実数 s, t を $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ をみたすように定めるとき, s と t の値を求めよ.

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ.

5. 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $\frac{dx}{dt} = 0$ または $\frac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ.
- (2) C の概形を xy 平面上に描け.
- (3) C の $y \leq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.