

(令 4 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. a を正の実数, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a$ とする. t を実数とするとき, 点 $P(t, f(t))$ における放物線 $y = f(x)$ の接線と原点の距離を $g(t)$ とする. $g(t)$ の最小値とそのときの t の値を a を用いて表せ.
(配点 30 点)

2. z を実数でない複素数, $A(z)$, $B(z^2)$, $C(z^3)$ を複素数平面上の 3 点とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 3 点 A , B , C は一直線上にないことを示せ.

(2) w を $w \neq 0, 1$ である複素数, $O(0)$, $P(1)$, $Q(w)$ を複素数平面上の 3 点とし, $\angle ABC = \angle OPQ$, $\angle BAC = \angle POQ$ とする. w の値を z を用いて表せ. ただし, 角は向きを含めて考える.

(3) $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形になるときの z の値を求めよ.

3. 以下の問に答えよ。(配点30点)

(1) $t \geq 0$ とする. $t - \frac{1}{6}t^3 \leq \sin t \leq t$ を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \int_{n^2}^{n^2+n} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) に
よって定める. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

4. 媒介変数表示 $x = \sin t$, $y = -\cos 2t - 2\cos t - 1$ ($0 \leq t \leq \pi$) で表される曲線を C とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\frac{dx}{dt} = 0$ または $\frac{dy}{dt} = 0$ となる t の値を求めよ.

(2) C の概形をかけ.

(3) C と y 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

5. m を整数, n を自然数とし, m を $2n - 1$ で割ると $n - 1$ 余り, $2n + 1$ で割ると n 余るとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $2n - 1$ と $2n + 1$ は互いに素であることを示せ.

(2) $n = 5$ のときの m をすべて求めよ.

(3) m を $4n^2 - 1$ で割った余りを n を用いて表せ.