

(令 4 前)

数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
によって定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める.
 b_n の値を n を用いて表せ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

2. m を 3 以上の自然数, $\theta = \frac{2\pi}{m}$, C_1 を半径 1 の円とする. 円 C_1 に内接する (すべての頂点が C_1 上にある) 正 m 角形を P_1 とし, P_1 に内接する (P_1 のすべての辺と接する) 円を C_2 とする. 同様に, n を自然数とするとき, 円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし, P_n に内接する円を C_{n+1} とする. C_n の半径を r_n , C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし, $f(m) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) r_n, s_n の値を θ, n を用いて表せ.

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ.

(3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} f(m)$ を求めよ.

ただし, 必要があれば $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ を用いてよい.

3. a を実数, $0 < a < 1$ とし, $f(x) = \log(1 + x^2) - ax^2$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ.

(2) $f(1) = 0$ とする. 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

4. a を正の実数とし、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $y = \sqrt{a}x + \sqrt{a}$ が異なる 2 点 P, Q で交わっているとす。線分 PQ の中点を $R(s, t)$ とす。以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) s, t の値を a を用いて表せ。

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) t の値を s を用いて表せ。

5. a, b を実数, p を素数とし, $1 < a < b$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) x, y, z を 0 でない実数とする. $a^x = b^y = (ab)^z$ ならば $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ であることを示せ.

(2) m, n を $m > n$ をみたす自然数とし, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ とする. m, n の値を p を用いて表せ.

(3) m, n を自然数とし, $a^m = b^n = (ab)^p$ とする. b の値を a, p を用いて表せ.