

(令 3 後)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 整数を係数とする整式  $f(x)$  に関する条件「すべての整数  $n$  について  $f(n)$  は 5 の倍数となる」を  $P$  とする. 以下の問に答えよ.

(配点 30 点)

(1)  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$  とする.  $f(x)$  を因数分解せよ. また  $f(x)$  は条件  $P$  をみたすことを示せ.

(2)  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d$  は整数) とする. 整式  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$  を

$$g_1(x) = f(x+1) - f(x),$$

$$g_{i+1}(x) = g_i(x+1) - g_i(x) \quad (i = 1, 2, 3)$$

により定める.  $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$  を求めよ.

(3) 整数を係数とする 4 次式  $f(x)$  で  $x^4$  の係数が 1 であるものは条件  $P$  をみたさないことを示せ.

**2.**  $a, b$  を 4 以上の整数とする.  $a$  個の赤球と  $b$  個の白球が入っている袋から  $k$  個の球を同時に取り出すとき, 取り出された球がすべて同じ色である確率を  $p_k$  とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $n = a + b, s = ab$  とする.  $1 - p_2, 1 - p_3$  を  $n, s$  を用いて表せ.

(2)  $p_2 = \frac{1}{2}$  とする.

(i)  $p_3$  を求めよ.

(ii)  $p_4$  と  $\frac{1}{8}$  の大小を比較せよ.

**3.** 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 空間内に点  $O$  と,  $O$  を通らない平面  $\alpha$  がある.  $\alpha$  上にある点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  と実数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) が

$$x_1 \overrightarrow{OP_1} + x_2 \overrightarrow{OP_2} + \dots + x_n \overrightarrow{OP_n} = \vec{0}$$

をみたすとき,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  が成り立つことを示せ.

- (2)  $O$  を頂点とし, 正六角形  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  を底面とする六角錐<sup>すい</sup>がある.  $0 < t_i < 1$  をみたす実数  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) に対して, 辺  $OA_i$  を  $t_i : (1 - t_i)$  に内分する点を  $P_i$  とする. このとき点  $P_1, P_2, \dots, P_6$  が同一平面上にあるならば, 次の等式が成り立つことを示せ.

(i) 
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_5} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} + \frac{1}{t_6}$$

(ii) 
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_4} = \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_5} = \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_6}$$

4.  $a$  を実数とする.  $x$  の 2 次方程式  $x^2 + (a+1)x + a^2 - 1 = 0$  について, 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (2)  $a$  を (1) で求めた範囲で動かすとき, この 2 次方程式の実数解がとりうる値の範囲を求めよ.

## 5. 関数

$$f(x) = \int_{-1}^x \frac{dt}{t^2 - t + 1} + \int_x^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}$$

の最小値を求めよ. (配点 30 点)