

(2020 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

**注意** 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1.  $\alpha$ は実数とし,  $f(x)$ は係数が実数である3次式で, 次の条件 (i), (ii) をみたすとする.

(i)  $f(x)$ の $x^3$ の係数は1である.

(ii)  $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について,

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ.

以下の問に答えよ. (配点30点)

(1)  $f(x)$ は $(x - \alpha)^2$ で割り切れることを示せ.

(2)  $f(\alpha + 2) = 0$ とする.  $f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす $x$ を $\alpha$ を用いて表せ.

(3) (2)の条件のもとで $\alpha = 0$ とする.  $xy$ 平面において不等式

$$y \geq f(x) \text{ かつ } y \geq f'(x) \text{ かつ } y \leq 0$$

の表す部分の面積を求めよ.

**2.**  $\theta$ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ をみたす実数とし, 原点 $O$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ を頂点とする $\triangle OAB$ の内接円の中心を $P$ とする. また,  $\theta$ がこの範囲を動くときに点 $P$ が描く曲線と線分 $OA$ によって囲まれた部分を $D$ とする. 以下の問に答えよ. (配点30点)

- (1) 点 $P$ の座標は $\left(1 - \sin \theta, \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}\right)$ で表されることを示せ.
- (2)  $D$ を $x$ 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

**3.** 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.
- (2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ.
- (3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ.

4.  $n$  を自然数とし,  $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$  に対して  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $f(x)$  が最大となる  $x$  の値がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) (1) の  $x$  の値を  $x_n$  とする. このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\tan x_n}$  を求めよ.

5.  $p$  を 2 以上の自然数とし, 数列  $\{x_n\}$  は

$$x_1 = \frac{1}{2^p + 1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1)  $p = 3$  のとき,  $x_n$  を求めよ.

(2)  $x_{p+1} = x_1$  であることを示せ.