

(2020 後)

数 学

(理 科 系)

(1 ～ 5 ページ)

- ・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $f(x) = e^{4x} \cos^2 x$ とする. $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において $f(x)$ は増加することを示せ.

(2) $g(x) = e^{4x} - 2 - \tan x$ とする. $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ において方程式 $g(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ.

2. a を $a \geq 0$ をみたす実数とし, xy 平面において不等式

$$0 \leq x \leq e - 1 \quad \text{かつ} \quad y \{ y - \log(x + 1) + a \} \leq 0$$

の表す部分の面積を $S(a)$ とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $S(a)$ を求めよ.

(2) $S(a)$ の最小値を求めよ.

3. n を自然数とし, 実数 x に対して

$$f_n(x) = (-1)^n \left\{ e^{-x} - 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right\}$$

とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1) $f_{n+1}(x)$ の導関数 $f'_{n+1}(x)$ について, $f'_{n+1}(x) = f_n(x)$ が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数 n について, $x > 0$ のとき $f_n(x) < 0$ であることを示せ.
- (3) $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ を求めよ.

4. i は虚数単位とし, $z = \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$ とする. また, 複素数平面上の5点を $A(0)$, $B(1)$, $C(z)$, $D(z^4)$, $E(z+z^5)$ によって定める. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) $\triangle ACD$ は正三角形となることを示せ.

(2) 3点 B , C , E は同一直線上にあることを示せ.

(3) $\angle AED$ の大きさを求めよ.

5. さいころを3回投げ、出た目の数を順に a_1, a_2, a_3 とする. このとき, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 を

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad x_k = a_k x_{k-1} (1 - x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

で定める. ただし, $a_4 = 1$ とする. また, $k = 2, 3, 4$ に対して, $x_k = 0$ となる確率を p_k とし, $x_k > 0$ となる確率を q_k とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

(1) p_2, q_2 を求めよ.

(2) p_3, q_3 を求めよ.

(3) p_4 を求めよ.